102

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

I] Nombres complexes de module 1 et géométrie

1] Nombres complexes de module 1 et sous-groupes

[Dre]

Définition 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 2 : $|\mu_n| = n$

Théorème 3 : $\mu_n < \mathbb{U} < \mathbb{C}^*$

Proposition 4 : Soit $H < \mathbb{C}^*$ borné

Alors : $H < \mathbb{U}$

Théorème 5 : Soit $H < \mathbb{C}^*$ sous-groupe fini

Alors : H est cyclique

Application 6 : μ_n est cyclique

2] L'exponentielle complexe

[Dre]

Définition 7 : On note $\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n} \frac{z^n}{n!} \end{array}$ la fonction exponentielle complexe et $\phi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \exp(it) \end{array}$.

Proposition 8 : (1) Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.
(2) La fonction exp est holomorphe et $\exp' = \exp$.
(3) La fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, est localement ouverte et est alors une application ouverte.

Théorème 9 : La fonction $\exp : (\mathbb{C}; +) \to (\mathbb{C}^*; \times)$ est un morphisme de groupes surjectif, non-injectif. et la fonction $\phi : (\mathbb{R}; +) \to (\mathbb{U}; \times)$ est également un morphisme de groupes surjectif, non-injectif.

Proposition 10 : $\ker(\phi)$ est un sous-groupe non-trivial de $\mathbb{R}$ fermé et est de la forme $b\mathbb{Z}$ avec $b = \inf\{x > 0 \mid \phi(x) = 0\} \neq 0$.

Définition 11 : On définit les nombres $\tau = 2\pi$ tel que $\ker(\phi) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 12 : $\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

[Dre]

Application 13 : Les éléments de μ_n sont les $\omega_k := \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right)$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Définition 14 : Une racine n-ième de l'unité est dite primitive si elle engendre μ_n.

Proposition 15 : ω_k est racine primitive ssi $k \wedge n = 1$

3] Angles et rotations planes

Soit par la suite E le plan vectoriel de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

[Dre]

Théorème 16 : $SO_2(\mathbb{R})$ agit transitivement et simplement sur $\mathbb{U}$ i.e. $\forall u, v \in \mathbb{U}, \exists! f \in SO_2(\mathbb{R}) \setminus f(u) = v$

Définition 17 : L'espace E est dit orienté lorsque l'on choisi une base orthonormée de référence $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$. Une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1'; e_2')$ de E est dite orientée dans le sens direct s'il existe $f \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $f(e_1) = e_1'$ et $f(e_2) = e_2'$ i.e. lorsque $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$. Une base $\mathcal{B}''$ est dite directe lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') > 0$.

Définition 18 : On défini $\sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \mathrm{Im}(\phi(\theta)) \end{array}$ et $\cos : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \mathrm{Re}(\phi(\theta)) \end{array}$

Proposition 19 : (formules d'Euler) Soit $x \in \mathbb{R}$

Alors : $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$; $\cos(x) = \dfrac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$
$\sin(x) = \dfrac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$

Proposition 20 : L'application $\rho : \begin{array}{l} \mathbb{U} \to SO_2(\mathbb{R}) \\ \exp(i\theta) \mapsto R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.
En particulier, $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif, connexe et compact.

4] Angles orientés de vecteurs

[Dre]

Définition 21 : Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$. Soit la relation sur $\mathcal{A}$: $(u; v) \sim (u'; v')$ ssi $\exists R_\theta \in SO_2(\mathbb{R}) \setminus \begin{cases} R_\theta(u) = u' \\ R_\theta(v) = v' \end{cases}$ et on note $\mathcal{A}/\sim$ l'ensemble des angles orientés de vecteurs.

[Dre]

Proposition 22 : L'application $\varphi : \mathbb{U} \to SO_2(\mathbb{R})$, $(u;v) \mapsto R_\theta$ telle que $R_\theta(u) = v$ est bien définie et est une bijection.

Proposition 23 : (relation de Chasles) Soit $u, v, w \in S^1$

Alors : $(u;v) + (v;w) = (u;w)$

Proposition 24 : L'isomorphisme entre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $SO_2(\mathbb{R})$ permet de définir une mesure des angles orientés de vecteurs.

Remarque 25 : Par l'isomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{U}$, $\theta \mapsto \exp(i\theta)$, à chaque angle correspond un nombre réel défini à 2π près. Ce nombre s'appelle la mesure de cet angle.

II | Quelques applications à la géométrie, cyclotomie et au comportement asymptotique de suites

1| Matrices circulantes et polygônes

[Isen]

Définition 26 : Soit $(z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n$. L'isobarycentre des points $(z_1; \dots; z_n)$ est : $g := \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$

Théorème 27 : (du déterminant circulant) Soit $(a_0; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = \exp(i \frac{2\pi}{n})$.

Alors :
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Proposition 28 : Soit P polygône du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1; \dots; z_n\} \in \mathbb{C}^n$ et soit la suite de polygônes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $P_0 = P$, et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.

Alors : la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P

[Per]

2| Polynômes cyclotomiques

Définition 29 : Le n-ième polynôme cyclotomique est : $\Phi_n(X) = \prod_{\omega \in \mu_n^\times} (X - \omega)$ avec $\mu_n^\times$ l'ensemble des racines n-ièmes primitives de l'unité.

Proposition 30 : $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$

Exemple 31 : $\Phi_1(X) = X - 1$; $\Phi_2(X) = X + 1$; $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$.

Corollaire 32 : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ avec φ l'indicatrice d'Euler.

Théorème 33 : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible, unitaire sur $\mathbb{Q}[X]$ et est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

[Dre]

Théorème 34 : (de Wedderburn) Tout corps gauche fini est commutatif.

[FGN An2]

3| Partition d'un entier en parts fixées

Théorème 35 : Soit $(a_1; \dots; a_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ entiers premiers entre eux et soit $\left(u_n := \mathrm{card}\left\{(x_1; \dots; x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \times \dots \times a_k} \times \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

Références :

[Dre] Leçons pour l'agrégation de mathématiques - Dreveton

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[Per] Cours d'Algèbre - Perrin

[FGN An 2] Exercices de mathématiques Oraux X-ENS Analyse 2 - Francinou